Corrigé

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln(x) - x - 2.$$

1. **a.** Somme de produits de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$, f est dérivable et sur cet intervalle :
   $f'(x) = \ln x + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$.

   b. On a $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}\ln\mathrm{e} - \mathrm{e} - 2 = -2$.
   De plus $f'(\mathrm{e}) = \ln\mathrm{e} = 1$.
   On sait que $M(x\,;\,y) \in (T) \iff y - (-2) = 1(x - \mathrm{e}) \iff y = x - 2 - \mathrm{e}$.

   c. De $f'(x) = \ln x$, on en déduit que $f''(x) = \dfrac{1}{x}$.
   Comme $x > 0$, on a donc $f''(x) > 0$ sur $]0\,;\,+\infty[$: la fonction f est donc convexe sur cet intervalle.

   d. Le résulta précédent montre que la courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessus de la tangente T.

2. **a.** On sait que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$, que $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$, donc par somme de limites $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -2$

   b. On a pour tout réel $x \in]0\,;\,+\infty[$, on peut écrire :
   $f(x) = x[\ln(x) - 1] - 2$.
   Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x - 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, on a par produit de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

3. On a $f'(x) = \ln x$. On sait que :
   - sur $]0\,;\,1[$, $\ln x < 0$: donc f décroit sur cet intervalle;
   - sur $]1\,;\,+\infty[$, $\ln x > 0$: donc f croit sur cet intervalle;
   - $f(1) = -1 - 2 = -3$ est donc le minimum de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

   D'où le tableau de variations :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ -2	↘	-3	↗	$+\infty$

4. **a.** Le tableau de variations montre que sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$, f est strictement croissante de -3 à plus l'infini.
   f étant continue car dérivable, le théorème des valeurs intermédiaires montre qu'il existe un réel unique α de $]1\,;\,+\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

   b. On a $f(4,3) \approx -0,028$ et $f(4,4) \approx 0,119$.
   D'après le même théorème ceci montre que $\alpha \in]4,3\,;\,4,4[$.

c. Conclusion :

- sur $]0\,;\,\alpha[$, $f(x) < 0$;
- sur $]\alpha\,;\,+\infty[$, $f(x) > 0$;
- $f(\alpha) = 0$.

La fonction `seuil(0.01)` renvoie la valeur 4,32.

Ceci donne l'encadrement de α au centième près : $4,32 < \alpha < 4,33$.